УДК 53 Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1

Н. М. Лебедев, М. В. Компаниец

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $O(n)$-СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ С АНТИСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА: ЧЕТЫРЁХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

При помощи ренормгруппового подхода рассматривается критическое поведение $O(n)$-симметричной модели ϕ^4 с антисимметричным тензорным параметром порядка. Ранее данная модель изучалась в рамках трёхпетлевого приближения посредством методов ε-разложения с пересуммированием конформ-борелевским методом и псевдо-ε-разложения. Было показано, что результаты данных подходов качественно согласуются друг с другом, однако полученные значения критических индексов могут довольно существенно отличаться. Более того, оставался открытым вопрос о чувствительности даже качественных результатов по отношению к учёту следующих порядков теории возмущений. В настоящей работе ренормгрупповые функции и критические индексы модели вычислены с четырёхпетлевой точностью в рамках обоих подходов. Их анализ показывает, что результаты применения различных подходов качественно согласуются и между собой и с результатами трёхпетлевого анализа. Библиогр. 29 назв. Табл. 3.

Ключевые слова: ренормализационная группа, критическое поведение.

Для цитирования: *Лебедев Н. М., Компаниец М. В.* Критическое поведение $O(n)$-симметричной модели с антисимметричным тензорным параметром порядка: четырёхпетлевое приближение // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 20–31.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.103

N. M. Lebedev, M. V. Kompaniets

CRITICAL BEHAVIOUR OF A $O(n)$-SYMMETRIC MODEL WITH ANTISYMMETRIC TENSOR ORDER PARAMETER: FOUR-LOOP APPROXIMATION

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The critical behavior of the $O(n)$-symmetric ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter is studied by means of the renormalization group approach. Previously, this model was studied in the framework of the three-loop approximation by means of ε-expansion with conformal Borel resummation technique and pseudo-ε-expansion. It was shown that the results of these approaches are in qualitative agreement with each other, however, the numerical values of the critical indices can differ quite significantly. Moreover, the question of the sensitivity of even qualitative results to the accounting of the higher orders of perturbation theory remained open. In the present paper, the RG functions and critical indices of the model are calculated up to four-loop accuracy within both approaches. Their analysis shows that the results of applying different approaches are qualitatively consistent both with each other and with the results of the three-loop analysis. Refs 29. Tables 3.

Keywords: renormalization group, critical behavior.

For citation: Lebedev N. M., Kompaniets M. V. Critical behaviour of a $O(n)$-symmetric model with antisymmetric tensor order parameter: Four-loop approximation. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry.* 2018. Vol. 5 (63), iss. 1. P. 20–31.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.103

* Н. М. Лебедев выражает благодарность РФФИ за финансовую поддержку в рамках гранта 16-32-00086 мол-а.

Введение. В работах [1–3] метод теоретико-полевой ренормгруппы применялся к $O(n)$-симметричной модели ϕ^4 с вещественным антисимметричным тензорным параметром порядка. Такая модель может иметь отношение к переходам между нематической, холестерической и голубой фазами жидких кристаллов [4–9], переходу в диссиметричную фазу в ферроэластиках [10–14] и (в комплексной модификации) к переходу в сверхпроводящее состояние в системах фермионов с высшими спинами или дополнительными степенями свободы [15–17]. При $n = 2$ и 3 модель соответственно сводится к хорошо изученным однозарядным скалярной и $O(3)$-векторной ϕ^4-моделям; при $n \geqslant 4$ это истинно двухзарядная модель.

В работе [1] ренормгрупповой (РГ) анализ исследуемой модели был выполнен в рамках однопетлевого приближения посредством метода ε-разложения. Было показано, что только при $n = 4$ в модели имеются фиксированные точки с вещественными координатами: одна инфракрасно-устойчивая (ИК-устойчивая) и три неустойчивых. При $n > 4$ нетривиальные фиксированные точки в модели отсутствуют, а РГ-потоки уходят либо на бесконечность, либо в нефизическую область.

Однако в работе [2] было продемонстрировано, что данные результаты неустойчивы по отношению к учёту следующих порядков теории возмущений. В частности, непосредственный учёт трёхпетлевых поправок привёл к смене ИК-устойчивой в главном приближении фиксированной точки на седловидную, в то время как одна из седловидных точек, наоборот, стала ИК-устойчивой после учёта асимптотического характера ε-разложений. В итоге в работе [2] был сделан вывод, что для достоверного определения типа перехода необходимо исследовать не только устойчивость полученных результатов по отношению к учёту следующих порядков теории возмущений, но также и их зависимость от выбора конкретной схемы ренормировки.

С этой целью в работе [3] РГ-функции и критические индексы модели были вычислены в рамках подхода ренормгруппы в фиксированной размерности пространства (в реальном пространстве) и метода псевдо-ε-разложения (τ-разложения) с трёхпетлевой точностью. Анализ полученных выражений позволил подтвердить качественные выводы работы [2], однако оставил открытым вопрос об их устойчивости по отношению к учёту следующих порядков теории возмущений.

В настоящей работе РГ-функции и критические индексы модели вычислены с четырёхпетлевой точностью в рамках обоих ранее исследованных подходов.

Известно, что τ-разложение является эффективным методом изучения характеристик критического поведения различных систем. Более того, данный подход позволяет получать надёжные численные значения критических индексов путём непосредственного суммирования τ-разложений без применения сложных техник пересуммирования, чувствительных к особенностям асимптотического поведения рядов теории возмущений [18–24].

В то же время ряды теории возмущений, полученные в рамках ε-разложения, демонстрируют существенно более быстрый рост коэффициентов. Поэтому в рамках данного подхода численные значения критических индексов были получены путём процедуры пересуммирования конформ-борелевским методом, учитывающей параметры ассимптотики ε-разложения, вычисленные в работе [2].

Модель. В данной работе рассматривается модель вещественного антисимметричного тензорного поля $\phi = \phi_{ik}(\boldsymbol{x})$ второго ранга ($\phi_{ik} = -\phi_{ki}, i, k = 1, \ldots, n$) в d-мерном евклидовом векторном пространстве. Модель задаётся функционалом действия:

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\phi(-\partial^2 + m_0^2)\phi) - \frac{g_{10}}{4!}\,(\mathrm{tr}(\phi^2))^2 - \frac{g_{20}}{4!}\,\mathrm{tr}(\phi^4). \qquad (1)$$

Здесь и далее интегрирование по d-мерному пространству, а также суммирование по повторяющимся индексам подразумевается; ∂^2 обозначает оператор Лапласа; m_0^2 — отклонение температуры (или её аналога) от критического значения; g_{10}, g_{20} — константы взаимодействия.

Для обеспечения стабильности модели необходимо, чтобы неквадратичная по полям часть функционала (1) была отрицательно определённой на любой конфигурации поля ϕ. Данное требование приводит к ограничениям на значения, которые могут принимать константы взаимодействия в случае чётных и нечётных значений n соответственно [1]:

$$2g_{10} + g_{20} > 0, \quad ng_{10} + g_{20} > 0; \tag{2}$$

$$2g_{10} + g_{20} > 0, \quad (n-1)g_{10} + g_{20} > 0. \tag{3}$$

Стандартный анализ симметрий функционала (1) и канонических размерностей полей и параметров модели показывает, что поверхностные ультрафиолетовые (УФ) расходимости, требующие устранения путём перенормировки, содержатся только в двух- и четырёхточечных 1-неприводимых функциях Грина. Как следствие, модель является мультипликативно ренормируемой с ренормированным действием:

$$S_R(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\phi(-Z_1\partial^2 + Z_2 m^2)\phi) - \frac{g_1\mu^{(4-d)}}{4!}\,Z_3(\mathrm{tr}(\phi^2))^2 - \frac{g_2\mu^{(4-d)}}{4!}\,Z_4\,\mathrm{tr}(\phi^4). \tag{4}$$

Связь констант ренормировки зарядов и поля с нумерованными константами даётся соотношениями

$$Z_{g_1} = \frac{Z_3}{Z_1^2},\ Z_{g_2} = \frac{Z_4}{Z_1^2},\ Z_\phi = Z_1^{1/2}. \tag{5}$$

Уравнение ренормгруппы получается стандартным способом на основе произвольности ренормировочной массы μ, и для k-точечной 1-неприводимой функции Грина имеет вид [25, 26]

$$(\mu\partial_\mu + \beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} - \gamma_{m^2}D_{m^2} - k\gamma_\phi)\Gamma_k^R = 0. \tag{6}$$

При этом РГ-функции задаются стандартными определениями [25, 26]:

$$\gamma_i \equiv \widetilde{D}_\mu \ln Z_i,\ \beta_i \equiv \widetilde{D}_\mu g_i,\ i = 1, 2, \tag{7}$$

где $\widetilde{D}_\mu \equiv x\partial_x$ при фиксированных затравочных параметрах.

Инфракрасное асимптотическое поведение функций Грина определяется набором ИК-притягивающих (ИК-устойчивых) неподвижных точек соответствующих уравнений РГ, координаты которых ищутся из условия одновременного зануления всех β-функций:

$$\beta_i(g_*) = 0. \tag{8}$$

Тип неподвижной точки определяется при помощи матрицы

$$\omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g_*}. \tag{9}$$

Неподвижная точка является ИК-притягивающей, если матрица ω положительна в этой точке, т. е. положительна вещественная часть всех её собственных чисел. Существование ИК-притягивающей неподвижной точки предполагает скейлинговое поведение для всех функций Грина, описываемое критическими индексами, в частности индексом Фишера:

$$\eta = 2\gamma_\phi(g_{1*}, g_{2*}). \tag{10}$$

В работе используются две различные схемы ренормировки: схема минимальных вычитаний MS и схема ренормировки в фиксированной размерности пространства, аналогичная используемой в работе [27].

В рамках обоих подходов константы ренормировки были явно вычислены в форме рядов по степеням g_1, g_2 с трёхпетлевой точностью. Каждую диаграмму исследуемой модели, дающую вклад в Z_i, можно представить в виде произведения соответствующей диаграммы скалярной ϕ^4 модели и дополнительного тензорного множителя, возникающего как результат свёртки тензорных частей пропагатора и вершинных множителей (подробное объяснение см. в работах [1, 2]). В случае подхода фиксированной размерности пространства значения диаграмм скалярной модели были взяты в работе [27] для $d = 2$ и в работе [19] для $d = 3$. В случае схемы минимальных вычитаний использовались значения, взятые в работе [26]. Вычисление тензорных свёрток было произведено с помощью программы FORM [28, 29].

Разложения для РГ-функций (7) были получены по известным рядам для констант ренормировки (подробное объяснение см. в работах [2, 3]). Полученные выражения приводятся и обсуждаются в нижеследующих разделах.

Стоит также отметить, что модель с дополнительными соотношениями $g_2 = 0$ для любого n или соотношением $4g_1 + 3g_2 = 0$ для $n = 4$ является замкнутой по отношению к процедуре ренормировки. Следствием этого является тот факт, что для координат неподвижных точек, обозначаемых в дальнейшем как **A** и **C**, соответствующие соотношения $g_{2*} = 0$ и $4g_{1*} + 3g_{2*} = 0$ должны выполняться точно, а по отношению к соответствующим однозарядным моделям эти точки должны быть ИК-притягивающими. Данный факт можно использовать для дополнительной проверки полученных в данной работе результатов.

ε-разложение. В рамках подхода ε-разложения для всех РГ-функций были получены полностью аналитические выражения, однако в силу их громоздкости и того факта, что после применения процедуры пересуммирования значения критических индексов могут быть найдены лишь численно, здесь мы тоже приводим только численные значения коэффициентов разложения. Для краткости мы приводим впервые вычисленные коэффициенты четырёхпетлевого приближения, в то время как ранее известные с трёхпетлевой точностью члены разложения обозначены как $\beta_1^{(3)}(g_1, g_2)$, $\beta_2^{(3)}(g_1, g_2)$, $\gamma_\phi^{(3)}(g_1, g_2)$ и могут быть найдены в работе [2] по приведённым в ней формулам (22)–(24) соответственно. Также для удобства в этом разделе всюду сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(8\pi^2)$.

$$\begin{aligned}\beta_1 =& \beta_1^{(3)}(g_1, g_2) + (0{,}000010n^6 - 0{,}000030n^5 - 0{,}0643234n^4 + 0{,}128698n^3 - 2{,}144418n^2 + \\ &+ 2{,}080064n - 12{,}557898)g_1^5 + (-0{,}000246n^5 + 0{,}000614n^4 - 0{,}623339n^3 + \\ &+ 0{,}934395n^2 - 14{,}215095n + 6{,}951835)g_1^4 g_2 + (-0{,}012994n^4 + 0{,}025988n^3 - \\ &- 3{,}180664n^2 + 3{,}167670n - 18{,}497684)g_1^3 g_2^2 + (-0{,}000042n^5 + 0{,}000106n^4 - \\ &- 0{,}125824n^3 + 0{,}188630n^2 - 6{,}142543n + 3{,}039837)g_1^2 g_2^3 + (-0{,}000969n^4 + \\ &+ 0{,}001937n^3 - 0{,}339387n^2 + 0{,}338281n - 2{,}275556)g_1 g_2^4 + (-0{,}002666n^3 + \\ &+ 0{,}003963n^2 - 0{,}151275n + 0{,}074705)g_2^5 + O(g^6), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 =& \beta_2^{(3)}(g_1, g_2) + (0{,}000173n^6 - 0{,}000519n^5 - 0{,}009335n^4 + 0{,}019536n^3 - 2{,}212644n^2 + \\ &+ 2{,}202790n - 34{,}982149)g_1^4 g_2 + (0{,}001444n^5 - 0{,}003609n^4 - 0{,}239656n^3 +\end{aligned}$$

$$+ 0{,}363094n^2 - 23{,}046496n + 11{,}462612)g_1^3 g_2^2 + (0{,}003395n^4 - 0{,}006790n^3 - $$
$$- 2{,}713640n^2 + 2{,}717035n - 18{,}023949)g_1^2 g_2^3 + (-0{,}058531n^3 + 0{,}087865n^2 - $$
$$- 3{,}043559n + 1{,}507386)g_1 g_2^4 + (-0{,}000168n^4 + 0{,}000317n^3 - 0{,}069960n^2 + $$
$$+ 0{,}070323n - 0{,}454975)g_2^5 + O(g^6), \qquad (12)$$

$$\gamma_\phi = \gamma_\phi^{(3)}(g_1, g_2) + (0{,}000007n^6 + 0{,}000023n^5 + 0{,}000219n^4 - 0{,}000475n^3 + 0{,}004340n^2 - $$
$$- 0{,}004099n + 0{,}012056)g_1^4 + (-0{,}000060n^5 + 0{,}000151n^4 + 0{,}002050n^3 - $$
$$- 0{,}003225n^2 + 0{,}025198n - 0{,}012056)g_1^3 g_2 + (-0{,}000090n^4 + $$
$$+ 0{,}000181n^3 + 0{,}009087n^2 - 0{,}009178n + 0{,}013744)g_1^2 g_2^2 + (0{,}000422n^3 - $$
$$- 0{,}000633n^2 + 0{,}006420n - 0{,}003105)g_1 g_2^3 + (0{,}000002n^4 - 0{,}000004n^3 + $$
$$+ 0{,}000339n^2 - 0{,}000337n + 0{,}000640)g_2^4 + O(g^5). \qquad (13)$$

По известным разложениям РГ-функций координаты трёх нетривиальных критических точек, обнаруженных авторами работы [1], и соответствующие им критические индексы были вычислены в форме ε-разложения. В приведённых ниже выражениях сделана подстановка $n = 4$, поскольку в работе [1] установлено, что нетривиальные неподвижные точки с вещественными координатами могут существовать только в этом случае.

Точка A:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}428571\varepsilon + 0{,}209912\varepsilon^2 - 0{,}100507\varepsilon^3 + 0{,}178258\varepsilon^4,\\
g_2 &= 0,\\
\omega_1 &= \varepsilon - 0{,}489795\varepsilon^2 + 0{,}948832\varepsilon^3 - 2{,}521871\varepsilon^4,\\
\omega_2 &= -0{,}142858\varepsilon - 0{,}151603\varepsilon^2 + 0{,}117489\varepsilon^3 - 0{,}331731\varepsilon^4,\\
\eta &= 0{,}020408\varepsilon^2 + 0{,}014889\varepsilon^3 - 0{,}006576\varepsilon^4.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Точка B:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}705882\varepsilon + 0{,}818237\varepsilon^2 - 0{,}310641\varepsilon^3 + 0{,}626898\varepsilon^4,\\
g_2 &= -0{,}705882\varepsilon - 1{,}69021\varepsilon^2 + 0{,}205344\varepsilon^3 - 1{,}294462\varepsilon^4,\\
\omega_1 &= \varepsilon - 0{,}541522\varepsilon^2 + 1{,}019739\varepsilon^3 - 2{,}619199\varepsilon^4,\\
\omega_2 &= 0{,}058823\varepsilon - 0{,}106554\varepsilon^2 - 0{,}195408\varepsilon^3 + 0{,}040578\varepsilon^4,\\
\eta &= 0{,}020761\varepsilon^2 + 0{,}017295\varepsilon^3 - 0{,}003487\varepsilon^4.
\end{aligned} \qquad (15)$$

Точка C:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}818182\varepsilon + 0{,}466567\varepsilon^2 - 0{,}258762\varepsilon^3 + 0{,}484615\varepsilon^4,\\
g_2 &= -1{,}09091\varepsilon - 0{,}622089\varepsilon^2 + 0{,}345019\varepsilon^3 - 0{,}646153\varepsilon^4,\\
\omega_1 &= \varepsilon - 0{,}570248\varepsilon^2 + 1{,}28289\varepsilon^3 - 3{,}78111\varepsilon^4,\\
\omega_2 &= -0{,}090909\varepsilon + 0{,}311796\varepsilon^2 - 0{,}230143\varepsilon^3 + 0{,}587198\varepsilon^4,\\
\eta &= 0{,}020661\varepsilon^2 + 0{,}018398\varepsilon^3 - 0{,}00744947\varepsilon^4.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Случай $d = 3$. В рамках подхода ренормгруппы в фиксированной размерности пространства для случая $d = 3$ были получены следующие выражения для РГ-функций. Так же, как и в предыдущем разделе, мы приводим лишь впервые вычисленные коэффициенты четырёхпетлевого приближения, в то время как ранее известные с трёхпетлевой точностью члены разложения, обозначенные как $\beta_1^{(3)}(g_1, g_2)$, $\beta_2^{(3)}(g_1, g_2)$, $\gamma_\phi^{(3)}(g_1, g_2)$, могут быть найдены по приведённым в работе [3] формулам (15)–(17) соответственно. Кроме того, этом разделе так же, как и в предыдущем, всюду сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(8\pi^2)$:

$$\begin{aligned}\beta_1 =& \beta_1^3(g_1, g_2) + (0{,}000015n^6 - 0{,}000045n^5 - 0{,}006865n^4 + 0{,}013805n^3 - 0{,}239365n^2 + \\ &+ 0{,}232455n - 1{,}413744)g_1^5 + (0{,}000261n^5 - 0{,}000652n^4 - 0{,}069723n^3 + 0{,}105237n^2 - \\ &- 1{,}627854n + 0{,}796365)g_1^4 g_2 + (-0{,}000349n^4 + 0{,}000697n^3 - 0{,}374186n^2 + \\ &+ 0{,}373837n - 2{,}099976)g_1^3 g_2^2 + (-0{,}000021n^5 + 0{,}000052n^4 - 0{,}013293n^3 + \\ &+ 0{,}019888n^2 - 0{,}707143n + +0{,}350259)g_1^2 g_2^3 + (-0{,}000128n^4 + 0{,}000257n^3 - \\ &- 0{,}036161n^2 + 0{,}036070n - 0{,}264548)g_1 g_2^4 + +(-0{,}000232n^3 + 0{,}000351n^2 - \\ &- 0{,}016355n + 0{,}008115)g_2^5 + O(g^6), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 =& \beta_2^{(3)}(g_1, g_2) + (-0{,}000055n^6 + 0{,}000166n^5 - 0{,}000115n^4 - 0{,}000048n^3 - 0{,}225369n^2 + \\ &+ 0{,}225421n - 3{,}883269)g_1^4 g_2 + (-0{,}000299n^5 + 0{,}000748n^4 - 0{,}015290n^3 + \\ &+ 0{,}022187n^2 - 2{,}531959n + 1{,}262307)g_1^3 g_2^2 + (-0{,}000411n^4 + 0{,}000823n^3 - \\ &- 0{,}283863n^2 + 0{,}283451n - 2{,}015581)g_1^2 g_2^3 + (-0{,}007615n^3 + 0{,}011404n^2 - \\ &- 0{,}333321n + 0{,}164692)g_1 g_2^4 + (-0{,}000024n^4 + 0{,}000046n^3 - 0{,}008252n^2 + \\ &+ 0{,}008230n - 0{,}052477)g_2^5 + O(g^6), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\phi =& \gamma_\phi^{(3)}(g_1, g_2) + (-0{,}00000021n^6 + 0{,}00000062n^5 + 0{,}00006381n^4 - 0{,}00012861n^3 + \\ &+ 0{,}00095355n^2 - 0{,}00088912n + 0{,}00251239)g_1^4 + (-0{,}00000166n^5 + 0{,}00000415n^4 + \\ &+ 0{,}00051874n^3 - 0{,}00078225n^2 + 0{,}00528580n - 0{,}00251239)g_1^3 g_2 + (0{,}00001333n^4 - \\ &- 0{,}00002665n^3 + 0{,}00199737n^2 - 0{,}00198404n + 0{,}00279865)g_1^2 g_2^2 + (0{,}00012720n^3 - \\ &- 0{,}00019080n^2 + 0{,}00132477n - 0{,}00063058)g_1 g_2^3 + (0{,}00000121n^4 - 0{,}00000242n^3 + \\ &+ 0{,}00007863n^2 - 0{,}00007742n + 0{,}00012448)g_2^4 + O(g^5). \end{aligned} \tag{19}$$

По известным разложениям РГ-функций координаты неподвижных точек и соответствующие им критические индексы были вычислены в форме τ-разложения. Для этого в (17), (18) заменён линейный член $g_{1,2} \to \tau g_{1,2}$. В приведённых ниже выражениях сделана подстановка $n = 4$.

Точка A:

$$g_1 \quad = \quad 0{,}428571\tau + 0{,}141237\tau^2 + 0{,}002840\tau^3 + 0{,}002765\tau^4,$$

$$
\begin{aligned}
g_2 &= 0,\\
\omega_1 &= \tau - 0{,}329554\tau^2 + 0{,}203958\tau^3 - 0{,}147240\tau^4,\\
\omega_2 &= -0{,}142857\tau - 0{,}101501\tau^2 - 0{,}001258\tau^3 - 0{,}023151\tau^4,\\
\eta &= 0{,}012094\tau^2 + 0{,}008979\tau^3 + 0{,}003961\tau^4.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Точка B:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}705882\tau + 0{,}547663\tau^2 + 0{,}127564\tau^3 - 0{,}045456\tau^4,\\
g_2 &= -0{,}705882\tau - 1{,}128978\tau^2 - 0{,}512302\tau^3 - 0{,}049290\tau^4,\\
\omega_1 &= \tau - 0{,}364091\tau^2 + 0{,}183818\tau^3 - 0{,}118377\tau^4,\\
\omega_2 &= 0{,}058823\tau - 0{,}070855\tau^2 - 0{,}126034\tau^3 - 0{,}064476\tau^4,\\
\eta &= 0{,}012303\tau^2 + 0{,}009984\tau^3 + 0{,}005667\tau^4.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Точка C:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}818182\tau + 0{,}313549\tau^2 + 0{,}008818\tau^3 + 0{,}007837\tau^4,\\
g_2 &= -1{,}09091\tau - 0{,}418065\tau^2 - 0{,}011757\tau^3 - 0{,}01045\tau^4,\\
\omega_1 &= \tau - 0{,}383226\tau^2 + 0{,}272169\tau^3 - 0{,}224950\tau^4,\\
\omega_2 &= -0{,}090909\tau + 0{,}207585\tau^2 + 0{,}009024\tau^3 + 0{,}031832\tau^4,\\
\eta &= 0{,}012244\tau^2 + 0{,}010404\tau^3 + 0{,}005027\tau^4.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Случай $d = 2$. Для подхода фиксированной размерности пространства и случая $d = 2$ были получены следующие выражения для РГ-функций. Как и ранее, мы приводим лишь впервые вычисленные коэффициенты четырёхпетлевого приближения, а трёхпетлевые разложения, обозначенные как $\beta_1^{(3)}(g_1, g_2)$, $\beta_2^{(3)}(g_1, g_2)$, $\gamma_\phi^{(3)}(g_1, g_2)$, могут быть найдены по приведённым в работе [3] формулам (21)–(23) соответственно. Для удобства в этом разделе всюду сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(2\pi)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_1}{2} = &\frac{\beta_1^3(g_1, g_2)}{2} + (-0{,}000009n^6 + 0{,}000026n^5 - 0{,}034690n^4 + 0{,}069336n^3 - 1{,}042054n^2 +\\
&+ 1{,}007390n - 5{,}857337)g_1^5 + (0{,}000073n^5 - 0{,}000183n^4 - 0{,}336953n^3 +\\
&+ 0{,}505613n^2 - 6{,}816885n + 3{,}324168)g_1^4 g_2 + (-0{,}007113n^4 + 0{,}014225n^3 -\\
&- 1{,}655153n^2 + 1{,}648041n - 8{,}572945)g_1^3 g_2^2 + (-0{,}000075n^5 + 0{,}000188n^4 -\\
&- 0{,}070248n^3 + 0{,}105184n^2 - 2{,}971747n + 1{,}468349)g_1^2 g_2^3 + (-0{,}000667n^4 +\\
&+ 0{,}001333n^3 - 0{,}167944n^2 + 0{,}167304n - 1{,}053886)g_1 g_2^4 + (-0{,}001393n^3 +\\
&+ 0{,}002092n^2 - 0{,}069839n + 0{,}034566)g_2^5 + O(g^6),
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_2}{2} = &\frac{\beta_2^{(3)}(g_1, g_2)}{2} + (-0{,}000080n^6 + 0{,}000239n^5 - 0{,}005155n^4 + 0{,}009912n^3 - 1{,}043498n^2 +\\
&+ 1{,}038582n - 15{,}990014)g_1^4 g_2 + (-0{,}000313n^5 + 0{,}000783n^4 - 0{,}120510n^3 +\\
&+ 0{,}179981n^2 - -10{,}6584217n + 5{,}299240)g_1^3 g_2^2 + (-0{,}000952n^4 + 0{,}001904n^3 -\\
&- 1{,}314103n^2 + 1{,}313151n - 8{,}165407)g_1^2 g_2^3 + (-0{,}034892n^3 + 0{,}052325n^2 -
\end{aligned}
$$

$$- 1{,}430708n + 0{,}706584)g_1 g_2^4 + (-0{,}000137n^4 + 0{,}000272n^3 - 0{,}036431n^2 +$$
$$+ 0{,}036299n - 0{,}211757)g_2^5 + O(g^6), \quad (24)$$

$$\gamma_\phi = \gamma_\phi^{(3)}(g_1, g_2) + (-0{,}00000447n^6 + 0{,}00001341n^5 + 0{,}00037783n^4 - 0{,}00077802n^3 +$$
$$+ 0{,}00603383n^2 - 0{,}00564259n + 0{,}01602439)g_1^4 + (-0{,}00003576n^5 + 0{,}00008939n^4 +$$
$$+ 0{,}00320146n^3 - 0{,}00489159n^2 + 0{,}033685267n - 0{,}016024389)g_1^3 g_2 +$$
$$+ (0{,}00001941n^4 - -0{,}00003882n^3 + 0{,}01267427n^2 - 0{,}01265486n +$$
$$+ 0{,}01787080)g_1^2 g_2^2 + (0{,}00074673n^3 - 0{,}00112009)n^2 + 0{,}00849283n -$$
$$- 0{,}00405973)g_1 g_2^3 + (0{,}00000706n^4 - 0{,}00001412n^3 + 0{,}00048436n^2 -$$
$$- 0{,}00047730n + 0{,}00081960)g_2^4 + O(g^5). \quad (25)$$

Как и в предыдущем разделе, по известным разложениям РГ-функций находим координаты трёх нетривиальных неподвижных точек и соответствующие им критические индексы в форме τ-разложения для единственного нетривиального случая $n = 4$.

Точка A:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}428571\tau + 0{,}239836\tau^2 + 0{,}018647\tau^3 + 0{,}008478\tau^4,\\
g_2 &= 0,\\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0{,}559618\tau^2 + 0{,}539324\tau^3 - 0{,}589932\tau^4,\\
\frac{\omega_2}{2} &= -0{,}142857\tau - 0{,}171799\tau^2 - 0{,}009016\tau^3 - 0{,}085776\tau^4,\\
\eta &= 0{,}037432\tau^2 + 0{,}039666\tau^3 + 0{,}020168\tau^4.
\end{aligned} \quad (26)$$

Точка B:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}705882\tau + 0{,}926789\tau^2 + 0{,}423377\tau^3 - 0{,}222441\tau^4,\\
g_2 &= -0{,}705882\tau - 1{,}907940\tau^2 - 1{,}580563\tau^3 - 0{,}213826\tau^4,\\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0{,}617968\tau^2 + 0{,}448858\tau^3 - 0{,}517774\tau^4,\\
\frac{\omega_2}{2} &= 0{,}058823\tau - 0{,}119387\tau^2 - 0{,}362933\tau^3 - 0{,}311133\tau^4,\\
\eta &= 0{,}038080\tau^2 + 0{,}044797\tau^3 + 0{,}034695\tau^4.
\end{aligned} \quad (27)$$

Точка C:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}818182\tau + 0{,}532022\tau^2 + 0{,}066832\tau^3 + 0{,}045014\tau^4,\\
g_2 &= -1{,}09091\tau - 0{,}709362\tau^2 - 0{,}089109\tau^3 - 0{,}060018\tau^4,\\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0{,}650249\tau^2 + 0{,}682279\tau^3 - 0{,}893010\tau^4,\\
\frac{\omega_2}{2} &= -0{,}090909\tau + 0{,}350054\tau^2 + 0{,}034867\tau^3 + 0{,}117126\tau^4,\\
\eta &= 0{,}037896\tau^2 + 0{,}047027\tau^3 + 0{,}028966\tau^4.
\end{aligned} \quad (28)$$

Обсуждение результатов. По известным τ- и ε-разложениям координат неподвижных точек и критических индексов можно получить их численные значения. Для этого ряды τ-разложений можно просуммировать напрямую, путём подстановки в них значения $\tau = 1$. Однако в случае ε-разложений в рассматриваемом приближении уже существенно сказывается асимптотический характер этих рядов. Поэтому для получения численных оценок в данном подходе воспользуемся методом борелевского пересуммирования с конформным мапингом, с учётом найденных в работе [2] параметров асимптотики ε-разложений.

Полученные таким путём численные значения индексов приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Сравнение критических индексов в размерности $d = 2$ для неподвижной точки A при $n = 4$

Индекс	$d = 3$		$d = 2$	
	ε-разложение	τ-разложение	ε-разложение	τ-разложение
g_1	0,542	0,575	1,102	0,695
g_2	0	0	0	0
ω_1	0,781	0,727	1,347	0,780
ω_2	−0,226	−0,269	−0,487	−0,819
η	0,018	0,025	0,052	0,097

Таблица 2

Сравнение критических индексов в размерности $d = 2$ для неподвижной точки B при $n = 4$

Индекс	$d = 3$		$d = 2$	
	ε-разложение	τ-разложение	ε-разложение	τ-разложение
g_1	1,145	1,336	2,401	1,834
g_2	−1,747	−2,396	−3,954	−4,408
ω_1	0,755	0,701	1,277	0,626
ω_2	−0,055	−0,203	−0,198	−1,469
η	0,017	0,028	0,045	0,118

Таблица 3

Сравнение критических индексов в размерности $d = 2$ для неподвижной точки C при $n = 4$

Индекс	$d = 3$		$d = 2$	
	ε-разложение	τ-разложение	ε-разложение	τ-разложение
g_1	1,027	1,148	2,019	1,462
g_2	−1,369	−1,531	−2,692	−1,949
ω_1	0,762	0,664	1,298	0,278
ω_2	0,077	0,158	0,245	0,822
η	0,017	0,028	0,044	0,114

Из табл. 1–3 видно, что для всех трёх неподвижных точек результаты суммирования τ-разложений качественно согласуются с результатами обработки ε-разложений. Более того, они так же качественно согласуются с результатами, полученными ранее в рамках трёхпетлевого анализа [3].

Тем не менее значения критических индексов могут довольно существенно различаться в зависимости от выбора схемы ренормировки при переходе к следующему порядку теории возмущений в рамках одной схемы. Особенно сильно различаются результаты в случае $d = 2$. Более того, из табл. 2 видно, что результаты непосредственного суммирования τ-разложений координат неподвижной точки B приводят к тому, что для неё перестают выполняться неравенства (2), (3), и в результате она покидает границу физической области параметров. Возможным объяснением данного факта может служить более сильная расходимость рядов теории возмущений в случае $d = 2$, которая приводит к необходимости учитывать асимптотические свойства τ-разложений уже на уровне трёх-четырёх петель. Этим же можно объяснить и более существенное расхождение значений индексов в сравнении со случаем $d = 3$.

Таким образом, можно заключить, что предсказания относительно возможных типов критического поведения изучаемой модели, сделанные в работе [2], оказались устойчивыми не только по отношению к выбору схемы ренормировки, но и по отношению к учёту следующих порядков теории возмущений. Это, в свою очередь, позволяет надеяться, что учёт следующих порядков теории возмущений, вкупе с нахождением параметров асимптотики τ-разложений и разработкой учитывающей их процедуры пересуммирования, позволит получить надёжные значения критических индексов модели.

Литература

1. *Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M.* Critical behaviour of the $O(n)$-ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter // J. Phys. (A). 2013 Vol. 46. 405002.

2. *Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M.* Critical behavior of the $O(n)$-ϕ^4-model with an antisymmetric tensor order parameter: Three-loop approximation // Theor. Math. Phys. 2017. Vol. 190, N 2. P. 204–216.

3. *Лебедев Н. М., Компаниец М. В.* Критическое поведение $O(n)$-симметричной модели с антисимметричным тензорным параметром порядка: ренормгруппа в реальном пространстве // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62), вып. 4. С. 417–428.

4. *Brazovski S. A., Dmitriev D.* Phase transitions in cholesteric liquid crystals // Sov. Phys. JETP. 1975. Vol. 42, N 3. P. 497.

5. *Brazovski S. A., Filev V. M.* Critical phenomena in cholesteric liquid crystals // Sov. Phys. JETP. 1978 Vol. 48, N 3. P. 497–573.

6. *Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S.* Landau theory of cholesteric blue phases // Phys. Rev. (A). 1983. Vol. 28. P. 1114.

7. *Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S.* Landau theory of cholesteric blue phases: The role of higher harmonics // Phys. Rev. (A). 1984. Vol. 30. P. 3264.

8. *Hornreich R. M., Shtrikman S.* Some open questions in cholesteric blue phases // Z. Phys. (B): Cond. Matt. 1987. Vol. 68. P. 369.

9. *Belyakov V. A., Dmitrienko V. E.* The blue phase of liquid crystals // Sov. Phys. Uspekhi. 1985. Vol. 28. P. 535.

10. *Изюмов Ю. А., Сыромятников В. Н.* Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М.: Наука, 1984.

11. *Dove M. T., Redfern S. A. T.* Lattice simulation studies of the ferroelastic phase transitions in (Na,K)$AlSi_3O_8$ and (Sr,Ca)$Al_2Si_2O_8$ feldspar solid solutions // Am. Mineral. 1997. Vol. 82. P. 8.

12. *Watson G. W., Parker S. C.* Dynamical instabilities in a-quartz and a-berlinite: A mechanism for amorphization // Phys. Rev. (B). 1995. Vol. 52. P. 13306.

13. *Goryainov S. V., Ovsyuk N. N.* Twisting of a-quartz tetrahedra at pressures near the transition to the amorphous state // J. Exp. Theor. Phys. Lett. 1999. Vol. 69. P. 467.

14. *Goryainov S. V., Ovsyuk N. N.* Mechanism of the formation of a soft mode in ferroelastic phase transition // J. Exp. Theor. Phys. Lett. 2001. Vol. 73, iss. 8. P. 408–410.

15. *Nalimov M. Yu., Komarova M. V., Honkonen J.* Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition // Theor. Math. Phys. 2013. Vol. 176, N 1. P. 89–97.

16. *Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations // Nucl. Phys. (B). 2016. Vol. 905. P. 16–44.

17. *Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations // Theor. Math. Phys. 2014. Vol. 181, N 2. P. 1448–1458.

18. *Orlov E. V., Sokolov A. I.* Critical thermodynamics of two-dimensional systems in the vi-loop renormalization-group approximation // Phys. Solid State. 2000. Vol. 42, N 11. P. 2151–2158.

19. *Nickel B. G., Meiron D. I., Baker G. A.* Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin model // University of Guelph rep. 1977.

20. *Baker G. A., Nickel B. G., Meiron D. I.* Critical indices from perturbation analysis of the Callan — Symanzik equation // Phys. Rev. (B). 1978. Vol. 17. P. 1365–1374.

21. *Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Critical exponents from field theory // Phys. Rev. (B). 1980. Vol. 21, N 9. P. 3976–3998.

22. *Guida R., Zinn-Justin J.* Critical exponents of the N-vector model // J. Phys. (A). 1998. Vol. 31. P. 8103.

23. *Folk R., Holovatch Yu., Yavorskii T.* Pseudo-ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model // Phys. Rev. (B). 2000. Vol. 62. P. 12195.

24. *Holovatch Yu., Ivaneiko D., Delamotte B.* On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order // J. Phys. (A). 2004. Vol. 37. P. 3569.

25. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.

26. *Vasiliev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

27. *Adzhemyan L. Ts., Kirienko Yu. V., Kompaniets M. V.* Critical exponent η in 2D $O(N)$-symmetric φ^4-model up to 6 loops // arXiv: 1602.02324.

28. *Vermaseren J. A. M.* New features of FORM // arXiv: math-ph/0010025.

29. *Kuipers J., Ueda T., Vermaseren J. A. M., Vollinga J.* FORM version 4.0 // Comp. Phys. Comm. 2013. Vol. 184, N 5. P. 1453–1467.

References

1. Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M. Critical behaviour of the $O(n)$-ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter. *J. Phys. (A)*, 2013, vol. 46, 405002.

2. Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M. Critical behavior of the $O(n)$-ϕ^4-model with an antisymmetric tensor order parameter: Three-loop approximation. *Theor. Math. Phys.*, 2017, vol. 190, no 2, pp. 204–216.

3. Lebedev N. M., Kompaniets M. V. Kriticheskoe povedenie $O(n)$-simmetrichnoi modeli s antisimmetrichnym tenzornym parametrom poriadka: renormgruppa v real'nom prostranstve [Critical behaviour of a $O(n)$-symmetric model with an antisymmetric tensor order parameter: the real-space renormalization group]. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry*, 2017, vol. 4 (62), iss. 4, pp. 417–428. (In Russian)

4. Brazovski S. A., Dmitriev D. Phase transitions in cholesteric liquid crystals. *Sov. Phys. JETP.*, 1975, vol. 42, no 3, pp. 497.

5. Brazovski S. A., Filev V. M. Critical phenomena in cholesteric liquid crystals. *Sov. Phys. JETP.*, 1978 vol. 48, no 3, pp. 497–573.

6. Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S. Landau theory of cholesteric blue phases. *Phys. Rev. (A)*, 1983, vol. 28, pp. 1114.

7. Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S. Landau theory of cholesteric blue phases: The role of higher harmonics. *Phys. Rev. (A)*, 1984, vol. 30, pp. 3264.

8. Hornreich R. M., Shtrikman S. Some open questions in cholesteric blue phases. *Z. Phys. (B): Cond. Matt.*, 1987, vol. 68, pp. 369.

9. Belyakov V. A., Dmitrienko V. E. The blue phase of liquid crystals. *Sov. Phys. Uspekhi*, 1985, vol. 28, pp. 535.

10. Iziumov Iu. A., Syromiatnikov V. N. *Fazovye perekhody i simmetriia kristallov* [*Phase transitions and symmetry of crystals*]. Moscow, Nauka Publ., 1984. (In Russian)

11. Dove M. T., Redfern S. A. T. Lattice simulation studies of the ferroelastic phase transitions in (Na,K)$AlSi_3O_8$ and (Sr,Ca)$Al_2Si_2O_8$ feldspar solid solutions. *Am. Mineral*, 1997, vol. 82, pp. 8.

12. Watson G. W., Parker S. C. Dynamical instabilities in a-quartz and a-berlinite: A mechanism for amorphization. *Phys. Rev. (B)*, 1995, vol. 52, pp. 13306.

13. Goryainov S. V., Ovsyuk N. N. Twisting of a-quartz tetrahedra at pressures near the transition to the amorphous state. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, 1999, vol. 69, pp. 467.

14. Goryainov S. V., Ovsyuk N. N. Mechanism of the formation of a soft mode in ferroelastic phase transition. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, 2001, vol. 73, iss. 8, pp. 408–410.

15. Nalimov M. Yu., Komarova M. V., Honkonen J. Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition. *Theor. Math. Phys.*, 2013, vol. 176, no 1, pp. 89–97.

16. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu. Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations. *Nucl. Phys. (B)*, 2016, vol. 905, pp. 16–44.

17. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu. Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations. *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 181, no 2, pp. 1448–1458.

18. Orlov E. V., Sokolov A. I. Critical thermodynamics of two-dimensional systems in the vi-loop renormalization-group approximation. *Phys. Solid State*, 2000, vol. 42, no 11, pp. 2151–2158.

19. Nickel B. G., Meiron D. I., Baker G. A. Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin model. *University of Guelph rep.*, 1977.

20. Baker G. A., Nickel B. G., Meiron D. I. Critical indices from perturbation analysis of the Callan — Symanzik equation. *Phys. Rev. (B)*, 1978, vol. 17, pp. 1365–1374.

21. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Critical exponents from field theory. *Phys. Rev. (B)*, 1980, vol. 21, no 9, pp. 3976–3998.

22. Guida R., Zinn-Justin J. Critical exponents of the N-vector model. *J. Phys. (A)*, 1998, vol. 31, pp. 8103.

23. Folk R., Holovatch Yu., Yavorskii T. Pseudo-ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model. *Phys. Rev. (B)*, 2000, vol. 62, pp. 12195.

24. Holovatch Yu., Ivaneiko D., Delamotte B. On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order. *J. Phys. (A)*, 2004, vol. 37, pp. 3569.

25. Zinn-Justin J. *Quantum field theory and critical phenomena*. Oxford, Clarendon, 1989.

26. Vasiliev A. N. *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2004.

27. Adzhemyan L. Ts., Kirienko Yu. V., Kompaniets M. V. Critical exponent η in 2D $O(N)$-symmetric φ^4-model up to 6 loops. *arXiv*: 1602.02324.

28. Vermaseren J. A. M. New features of FORM. *arXiv*: math-ph/0010025.

29. Kuipers J., Ueda T., Vermaseren J. A. M., Vollinga J. FORM version 4.0. *Comp. Phys. Comm.*, 2013, vol. 184, no 5, pp. 1453–1467.

Статья поступила в редакцию 4 декабря 2017 г.

Контактная информация

Лебедев Никита Михайлович — аспирант; e-mail: nikita.m.lebedev@gmail.com
Компаниец Михаил Владимирович — доктор физико-математических наук, доцент; e-mail: m.kompaniets@spbu.ru

Lebedev Nikita Mihailovich — post-graduate student; e-mail: nikita.m.lebedev@gmail.com
Kompaniets Mikhail Vladimirivich — Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor; e-mail: m.kompaniets@spbu.ru